38　面積（1）

323

(1)

l の方程式

l の C_1 ： $y=x^2$ 上の接点の座標を $(t,\ t^2)$ ・・・① とすると，

l の方程式は， $y=2t(x-t)+t^2$ より， $y=2tx-t^2$ ・・・② と表される。

$y=2tx-t^2$ は C_2 ： $y=x^2-6x+15$ とも接するから，それらの共有点の x 座標を求める方程式 $x^2-6x+15=2tx-t^2$ すなわち $x^2-2(t+3)x+t^2+15=0$ ・・・③ は重解をもつ。

よって，判別式を D とすると $D=0$

これと， $\dfrac{D}{4}=(t+3)^2-t^2-15=6(t-1)$ より， $t=1$

これを②に代入し，l の方程式を求めると， $y=2x-1$ ・・・(答)

C_1， C_2 および l の図示

l と C_1 の接点の座標は，①に $t=1$ を代入することにより， $(1,\ 1)$

l と C_2 の接点の x 座標は，③に $t=1$ を代入し，解を求めることにより， $x=4$

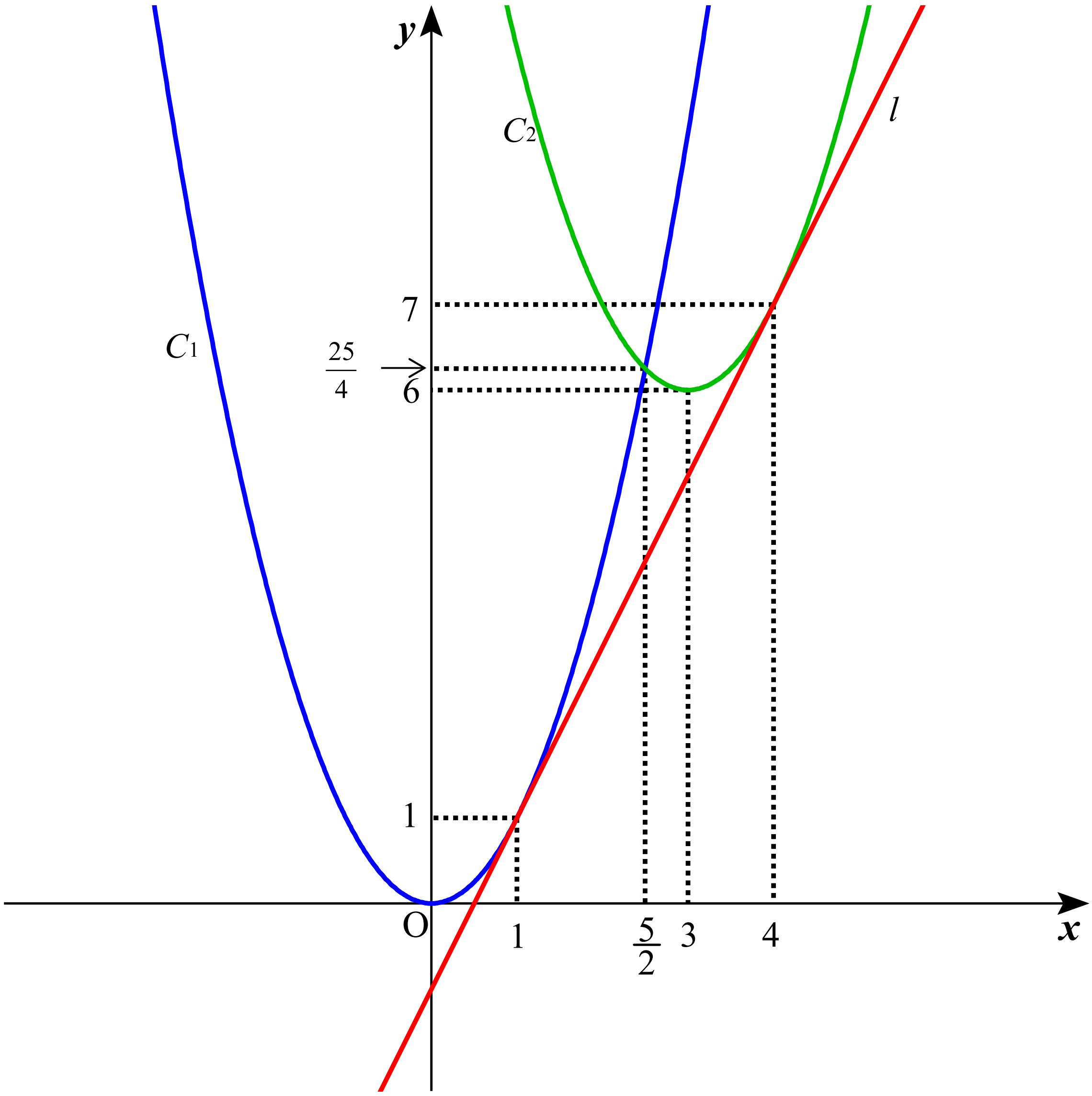
これを l の方程式 $y=2x-1$ に代入し，接点の y 座標を求めると， $y=7$

よって， l と C_2 の接点の座標は $(4,\ 7)$

また， C_1 と C_2 の共有点の x 座標は， $x^2=x^2-6x+15$ の解より， $x=\dfrac{5}{2}$

よって， C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$

これと C_2 ： $y=x^2-6x+15=(x-3)^2+6$ より，次図のようになる。



(2)

(1)の図より，

$$\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left\{x^2-6x+15-(2x-1)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{2}}\left\{x^2-(2x-1)\right\}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2\,dx+\int_{1}^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^{4}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{9}{4}$$

324

$y=x^2-x$ と $y=mx$ の共有点の x 座標

$x^2-x=mx$ すなわち $x(x-m-1)=0$ より，$x=0,\ m+1$

$y=x^2-x$ と $y=nx$ の共有点の x 座標

同様にして，$x=0,\ n+1$

よって，$y=x^2-x$ と 2 直線 $y=mx$，$y=nx$ とで囲まれる部分の面積を積分により求めると，

$$\int_0^{m+1}(x^2-x-mx)dx-\int_0^{n+1}(x^2-x-nx)dx=\frac{(m+1)^3}{6}-\frac{(n+1)^3}{6}$$
$$=\frac{\{(m+1)-(n+1)\}\{(m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2\}}{6}$$
$$=\frac{(m-n)\{(m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2\}}{6}$$

これと条件より，$(m-n)\{(m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2\}=37$

$m>n>0$ より，

$(m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2-(m-n)=(m+1)^2+(n+1)^2+mn+2n+1>0$

$\therefore\ (m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2>m-n>0$

これと，37 が素数であることとから，

$m-n=1$ ・・・①

$(m+1)^2+(m+1)(n+1)+(n+1)^2=37$ ・・・②

①より，$n+1=m$

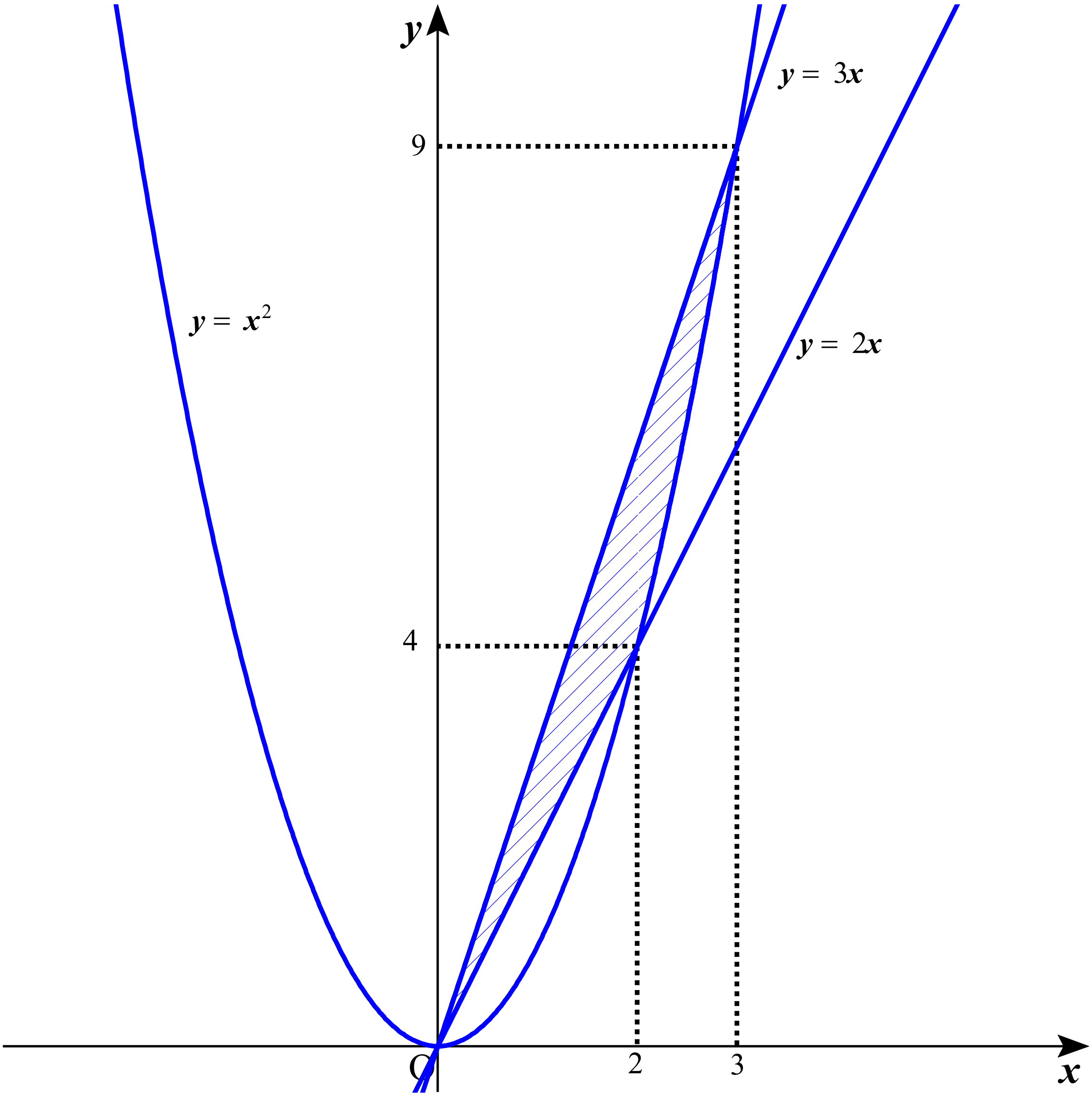
これを②に代入し，$n+1$ を消去すると，$(m+1)^2+(m+1)m+m^2=37$

両辺を整理し，因数分解すると，$3(m+4)(m-3)=0$

よって，$m>0$ より，$m=3$

これと①より，$n=2$

以上より，$(m,\ n)=(3,\ 2)$


y
y = 3x
9
y = x^2
y = 2x
4
O
2
3
x

325

***k* の値**

$2y=\left|x^2-5x+4\right|=\left|(x-1)(x-4)\right|$ より，

$x<1$ または $4<x$ のとき $y=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$

$1\leq x\leq 4$ のとき $y=-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{8}$

よって，曲線 C ： $2y=\left|x^2-5x+4\right|$ のグラフは次図青色実線のようになる。

ゆえに，曲線 C と直線 l ： $y=kx$ $(k>0)$ が 3 個の共有点をもつとき，
直線 l は， x 座標が $1\leq x\leq 4$ の範囲で，曲線 C と接する。

よって，接点の x 座標は $kx=-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ $(1\leq x\leq 4)$ の重解である。

$kx=-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ の両辺を 2 倍し， x について整理すると， $x^2+(2k-5)x+4=0$

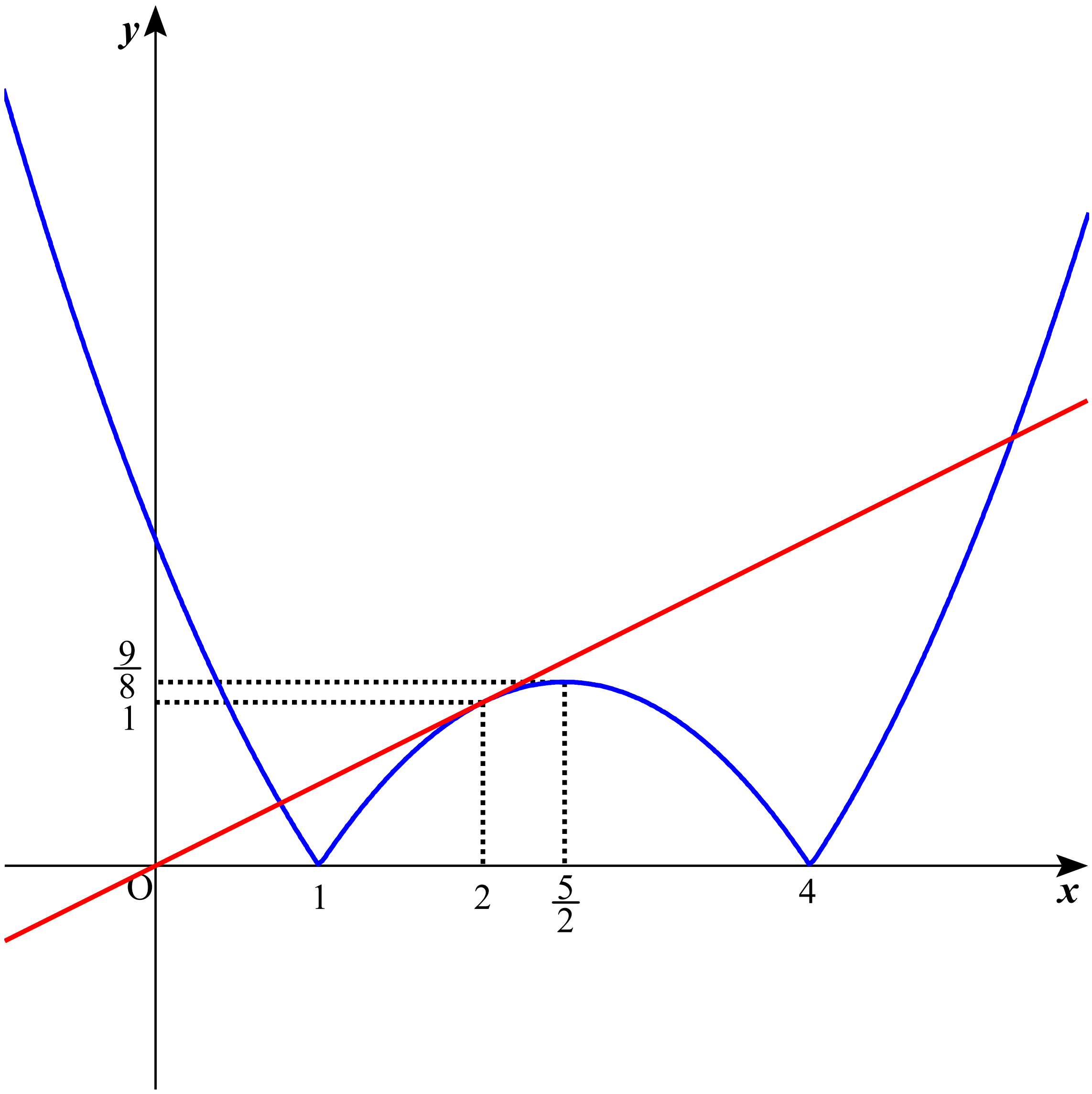
重解を α とすると，解と係数の関係より， $2\alpha=-2k+5$ $\quad\therefore\alpha=-k+\frac{5}{2}$

$1\leq\alpha\leq 4$ より， $1\leq -k+\frac{5}{2}\leq 4$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$

これと $k>0$ より， $0<k\leq\frac{3}{2}$ ・・・①

判別式を D とすると，重解条件より， $D=0$
これと $D=(2k-5)^2-16=\{(2k-5)+4\}\{(2k-5)-4\}=(2k-1)(2k-9)$ より，
$(2k-1)(2k-9)=0$ ・・・②

①かつ②より， $k=\frac{1}{2}$ ・・・(答)


y
x
O
1
2
$\frac{5}{2}$
4
$\frac{9}{8}$
1

面積

$y=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ と $y=\frac{1}{2}x$ とで囲まれた部分の面積を T

$y=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S とすると，

$y=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ と $y=-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ は x 軸に関して対称だから，

求める面積は $T-2S$　・・・③

T について

$y=\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)$ と $y=\frac{1}{2}x$ の共有点の x 座標

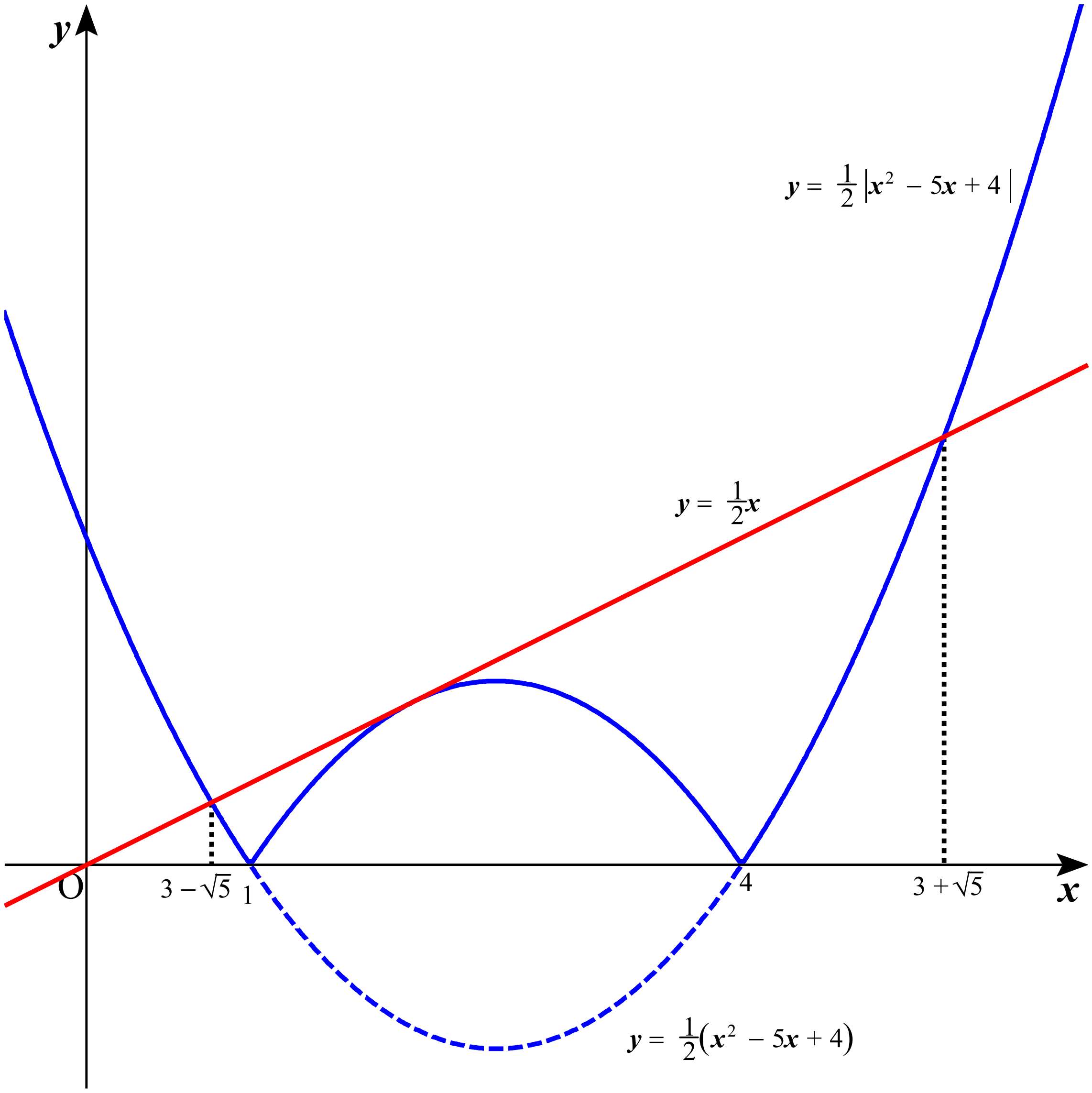
$\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)=\frac{1}{2}x$ より， $\frac{1}{2}\left(x^2-6x+4\right)=0$　$\therefore x=3\pm\sqrt{5}$

よって， $T=\int_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)\right\}dx=\frac{\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)-\left(3-\sqrt{5}\right)\right\}^3}{12}=\frac{10\sqrt{5}}{3}$　・・・④

S について

$\int_1^4\left\{0-\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right)\right\}dx=\frac{(4-1)^3}{12}=\frac{9}{4}$　・・・⑤

④と⑤を③に代入することにより， $\frac{20\sqrt{5}-27}{6}$



y
x
O
$y = \frac{1}{2}|x^2 - 5x + 4|$
$y = \frac{1}{2}x$
$y = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$
$3-\sqrt{5}$
1
4
$3+\sqrt{5}$

326

$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x<-1,\ 1<x) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$　　$|y+2|=\begin{cases} -y-2 & (y<-2) \\ y+2 & (-2\le y)\end{cases}$

より，

$x<-1,\ 1<x,\ y<-2$ のとき

　$x^2-1-y-2\le 1$　すなわち $y\ge x^2-4$

$x<-1,\ 1<x,\ y\ge -2$ のとき

　$x^2-1+y+2\le 1$　すなわち $y\le -x^2$

$-1\le x\le 1,\ y<-2$ のとき

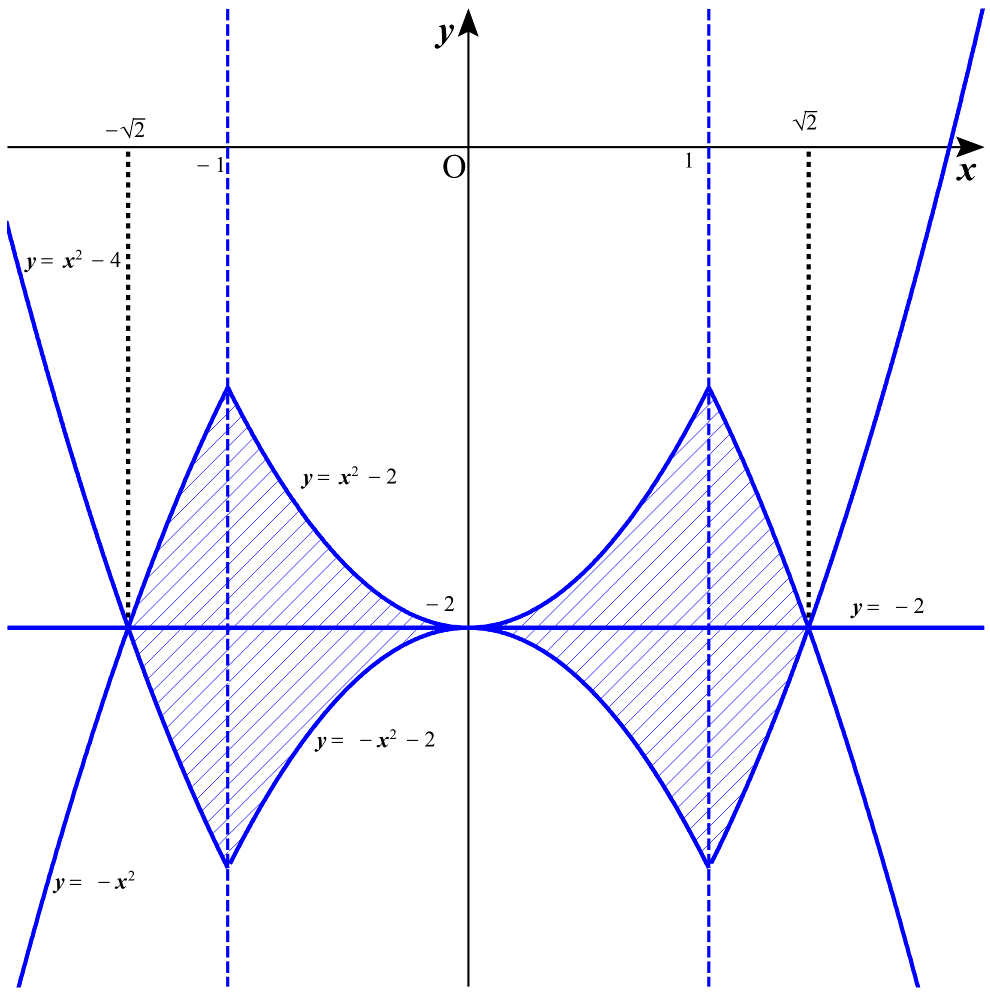
　$-x^2+1-y-2\le 1$　すなわち $y\ge -x^2-2$

$-1\le x\le 1,\ y\ge -2$ のとき

　$-x^2+1+y+2\le 1$　すなわち $y\le x^2-2$

よって，領域 D は下図のようになる。

ただし，境界線を含む。



$y=x^2-4$ 上の点を $\left(t,\ t^2-4\right)$，$y=-x^2$ 上の点を $\left(t,\ -t^2\right)$ とすると，

中点の座標は $\left(\dfrac{t+t}{2},\ \dfrac{t^2-4+\left(-t^2\right)}{2}\right)=\left(t,\ -2\right)$ である。

よって，中点の軌跡は $y=-2$

ゆえに，$y=x^2-4$ と $y=-x^2$ は $y=-2$ に関して対称である。

同様に，$y=x^2-2$ と $y=-x^2-2$ も $y=-2$ に関して対称である。

よって，求める面積は領域 D の $0\le x\le\sqrt{2}$ かつ $y\ge -2$ の部分の面積の 4 倍である。

したがって，求める面積を S とすると，

$$\frac{S}{4}=\int_0^1\left\{\left(x^2-2\right)-\left(-2\right)\right\}dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left\{-x^2-\left(-2\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(-x^2+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

より，

$$S=\frac{16}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

327

(1)

解法 1

円 C_1 の半径は 1 だから，△ABP について，$\mathrm{AP}=1$，$\mathrm{AB}=2$， $\angle\mathrm{APB}=90°$ より，$\angle\mathrm{PAB}=60°$

よって，P から y 軸に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{PH}=\mathrm{AP}\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\mathrm{AH}=\mathrm{AP}\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

これと，PH は x 軸と平行であることから，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

同様にして，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

解法 2

円 C_1 の半径は 1 だから，△ABP について，$\mathrm{AP}=1$，$\mathrm{AB}=2$， $\angle\mathrm{APB}=90°$ より，$\angle\mathrm{ABP}=30°$

よって，直線 BP の方程式は，切片 -1，傾き $\tan 60°=\sqrt{3}$ より， $y=\sqrt{3}x-1$

円 C_1 の方程式は，条件より， $x^2+(y-1)^2=1$ だから，これに $y=\sqrt{3}x-1$ を代入し，

y を消去し， x について整理，因数分解すると， $\left(2x-\sqrt{3}\right)^2=0$

よって，P の x 座標は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これと，P が $y=\sqrt{3}x-1$ 上の点であることから， $y=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

同様にして，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(2)

P と Q は x 軸に関して対称だから，放物線 C_2 は x 軸に関して対称である。

すなわち C_2 は y 軸を軸とする放物線である。

したがって， C_2 の方程式は，定数 a $(a\neq 0)$ と b を使って， $y=ax^2+b$ と表せる。

$y=ax^2+b$ は点 P を通ることから， $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}a+b$　　・・・①

$y=ax^2+b$ の点 P における傾きは直線 BP の傾きすなわち $\sqrt{3}$ と等しいことから，

$2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$　　$\therefore a=1$　　・・・②

①，②より， $a=1,\ b=-\dfrac{1}{4}$

よって， C_2 の方程式は $y=x^2-\dfrac{1}{4}$

(3)

放物線 C_2 すなわち $y=x^2-\frac{1}{4}$ 上の任意の点を $\mathrm{T}\left(t,\ t^2-\frac{1}{4}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AT}&=\sqrt{t^2+\left\{\left(t^2-\frac{1}{4}\right)-1\right\}^2}\\&=\sqrt{t^2+\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2}\\&=\sqrt{t^4-\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{16}}\\&=\sqrt{\left(t^2-\frac{3}{4}\right)^2+1}\end{aligned}$$

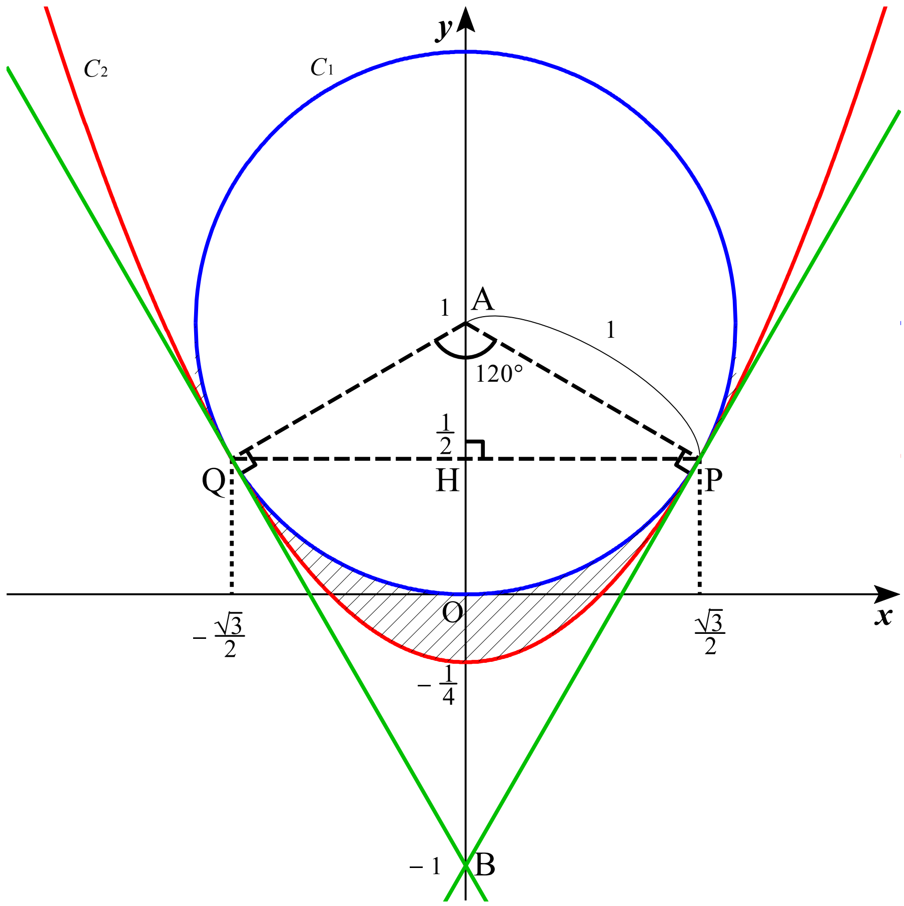
より，

$\mathrm{AT}\geq 1$

よって，題意が成り立つ。

(4)

下図斜線部で示した領域（ただし，境界線を含む）の面積を求めればよい。



扇形 APQ から△APQ を除いた部分の面積

$$\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

C_2 と線分 PQ に囲まれた部分の面積

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{2}-\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-x^2+\frac{3}{4}\right)dx\\&=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-x^2+\frac{3}{4}\right)dx\\&=2\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

よって，求める面積は，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ より，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

328

解法 1

直線 l と放物線 C の共有点を $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$（ただし，$\beta>\alpha$）とすると，

直線 l の方程式は $y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$　すなわち $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$　・・・①

また，$\displaystyle\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx=36$ より，$\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}=36$

よって，$\beta-\alpha=6$　すなわち $\beta=\alpha+6$　・・・②

②を①に代入し，α について整理すると，$\alpha^2-2(x-3)\alpha-6x+y=0$

これを α の 2 次方程式とみなし，判別式を D とすると，実数解条件より，$D\geq 0$

これと、$\dfrac{D}{4}=(x-3)^2+6x-y=x^2+9-y$ より，$x^2+9-y\geq 0$

よって，直線 l が通る点の存在範囲は $y\leq x^2+9$

解法 2　数学Ⅲ

①，②より，$y=2(\alpha+3)x-\alpha^2-6\alpha$　・・・③

$y=f(x)$ 上の任意の点 $(x,\ y)=(x(\alpha),\ y(\alpha))$ における接線が③で表されるとすると，

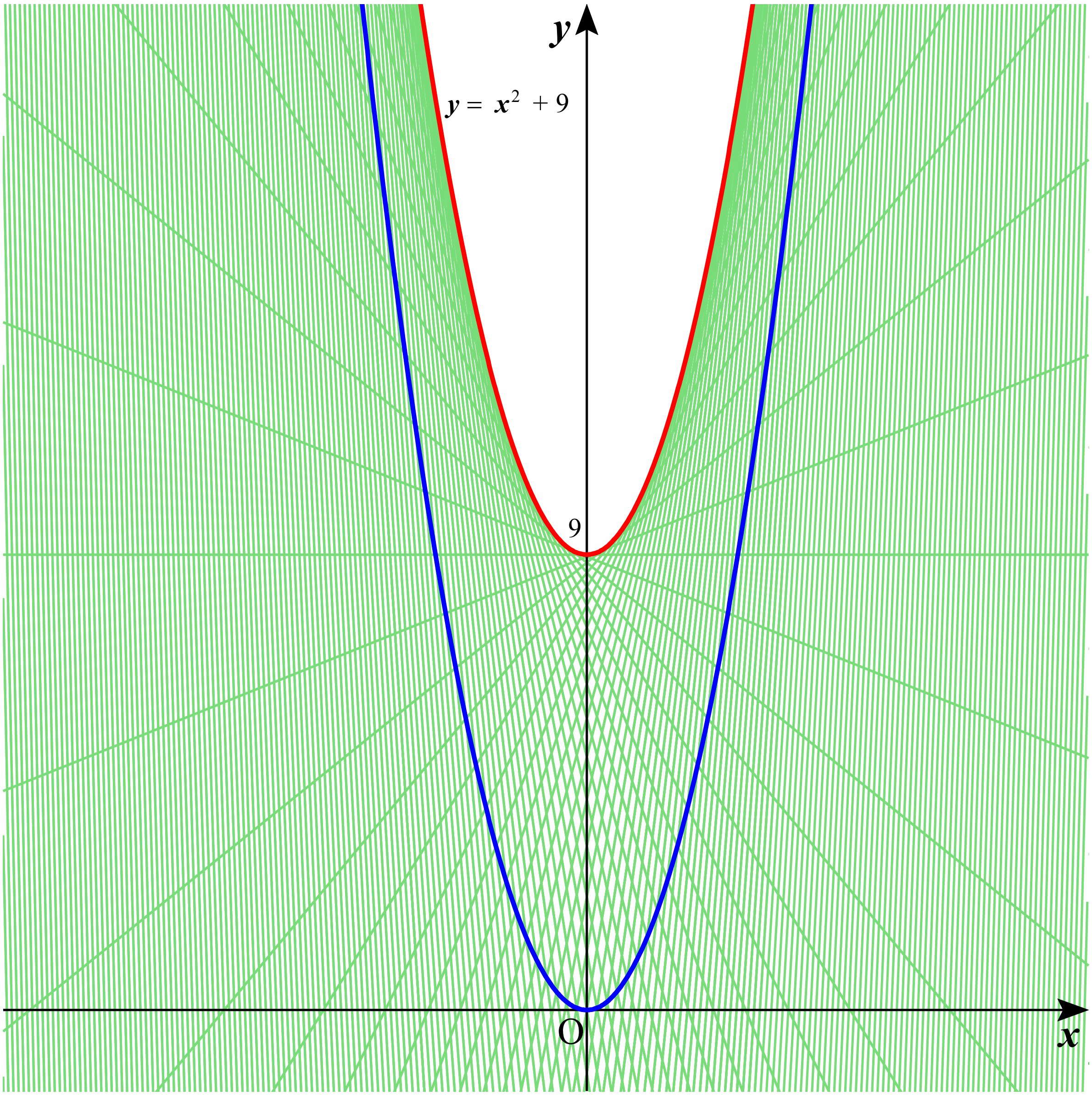
$(x,\ y)=(x(\alpha),\ y(\alpha))$ における接線の傾きすなわち $\dfrac{dy}{dx}$ が③の傾き $2(\alpha+3)$ と等しいから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy(\alpha)}{d\alpha}}{\frac{dx(\alpha)}{d\alpha}}=\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)}=2(\alpha+3)\quad\therefore\ y'(\alpha)=2(\alpha+3)x'(\alpha)\quad\cdots④$$

$(x(\alpha), y(\alpha))$ は $y=2(\alpha+3)x-\alpha^2-6\alpha$ 上の点だから，$y(\alpha)=2(\alpha+3)x(\alpha)-\alpha^2-6\alpha$
この両辺を α で微分すると，$y'(\alpha)=2x(\alpha)+2(\alpha+3)x'(\alpha)-2\alpha-6$　・・・⑤
⑤に④を代入すると，$2(\alpha+3)x'(\alpha)=2x(\alpha)+2(\alpha+3)x'(\alpha)-2\alpha-6$ より，
$x(\alpha)=\alpha+3$　・・・⑥
⑥を③に代入すると，

$$\begin{aligned} y(\alpha)&=2(\alpha+3)^2-\alpha^2-6\alpha \\ &=\alpha^2+6\alpha+18 \\ &=(\alpha+3)^2+9 \\ &=x^2(\alpha)+9 \end{aligned}$$

よって，$y=f(x)$ の方程式は $y=x^2+9$
$y=x^2+9$ は下に凸だから，③が通る範囲は $y\le x^2+9$



329

解法 1

$y=(3t^2-4)x-2t^3$ について，x を定数，t を変数と見なし，右辺を t について整理すると，

$y=-2t^3+3xt^2-4x$ より，$y'=-6t^2+6xt=-6t(t-x)$

$1\leq t\leq 2$ における y の増減を調べると，

(i) $1\leq x\leq 2$ のとき

t	1	$\cdots$	x	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-x-2$	$\uparrow$	x^3-4x	$\downarrow$	$8x-16$

よって，y の最大値は x^3-4x

y の最小値については，$8x-16-(-x-2)=9x-14$ より，

$1\leq x\leq \frac{14}{9}$ のとき $8x-16$，$\frac{14}{9}\leq x\leq 2$ のとき $-x-2$

よって，y がとる値の範囲は，

$1\leq x\leq \frac{14}{9}$ のとき $8x-16\leq y\leq x^3-4x$ ・・・①

$\frac{14}{9}\leq x\leq 2$ のとき $-x-2\leq y\leq x^3-4x$ ・・・②

(ii) $2<x\leq \frac{20}{9}$ のとき

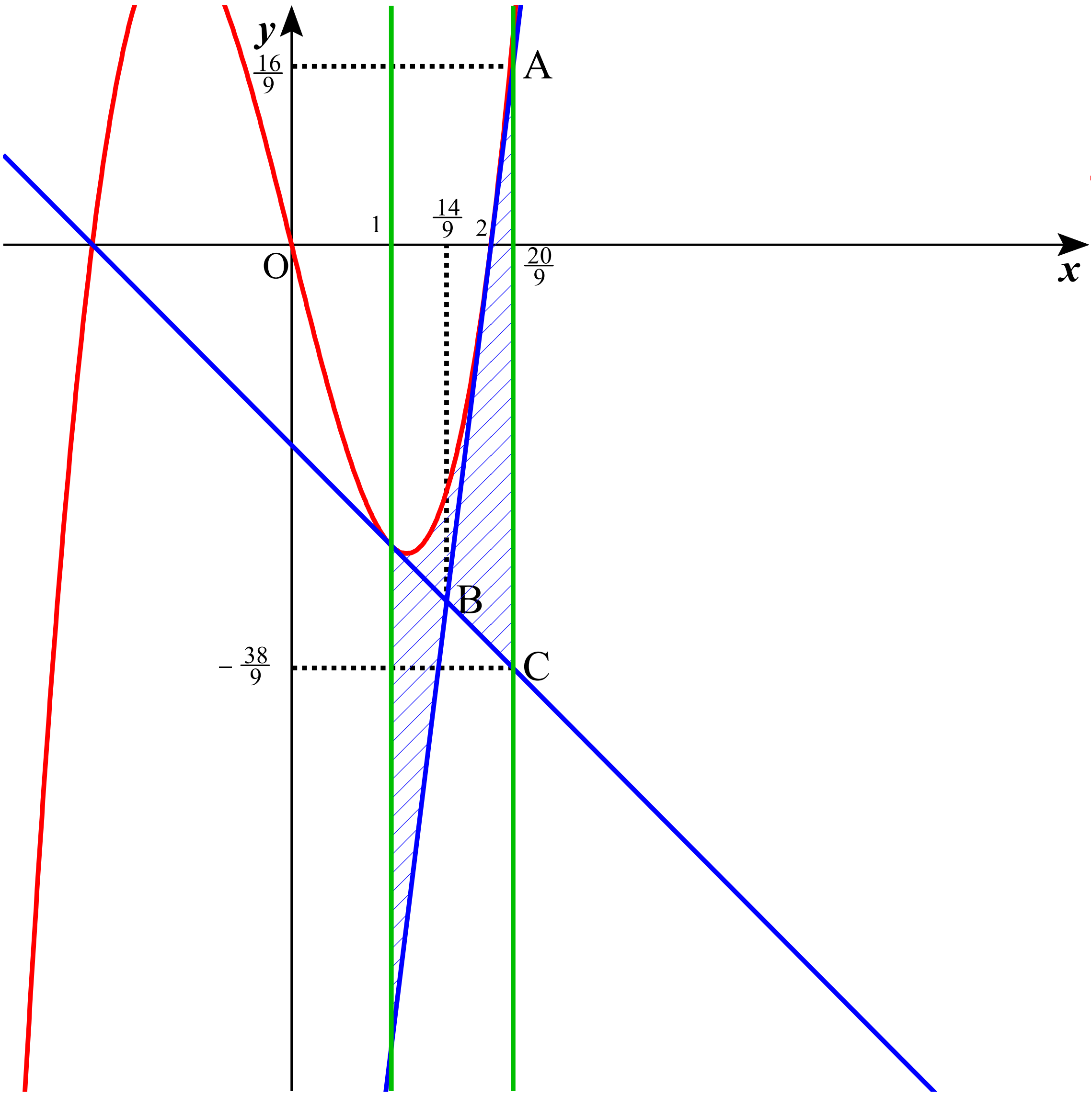
t	1	$\cdots$	2
y'		$+$	
y	$-x-2$	$\uparrow$	$8x-16$

よって，$2<x\leq \frac{20}{9}$ のとき y がとる値の範囲は，$-x-2\leq y\leq 8x-16$ ・・・③

また，$y=x^3-4x$ の $1\leq x\leq 2$ における増減は，$y'=3x^2-4$ より，下図のようになる。

x	1	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	-3	$\downarrow$	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	$\uparrow$	0

以上より，①～③の表す領域は次図のようになる。



よって，求める面積は，

△ABC の面積＋ $y=x^3-4x$ と $y=8x-16$ と $x=1$ で囲まれた部分の面積

より，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{20}{9}-\frac{14}{9}\right)\left\{\frac{16}{9}-\left(-\frac{38}{9}\right)\right\}+\int_1^2\left\{\left(x^3-4x\right)-\left(8x-16\right)\right\}dx=2+\left[\frac{x^4}{4}-6x^2+16x\right]_1^2$$

$$=\frac{15}{4}$$

解法 2

$y=(3t^2-4)x-2t^3$ を t の方程式とみると，$2t^3-3xt^2+4x+y=0$

これが $1\leq t\leq 2$ において少なくとも 1 つの実数解をもつための条件を求めることと

$f(t)=2t^3-3xt^2+4x+y$ とおいて，曲線 $f(t)$ が $1\leq t\leq 2$ において t 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつための条件を求めることは同値である。

そこで，後者から，その条件を求めると，$f'(t)=6t(t-x)$ より，

$1\leq x\leq 2$ のとき

$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	1	$\cdots$	x	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$x+2+y$	$\uparrow$	$-x^3+4x+y$	$\downarrow$	$16-8x+y$

最小値が 0 以下で最大値が 0 以上であればよいから，

最小値 $-x^3+4x+y\leq 0$ すなわち $y\leq x^3-4x$

最大値については，$x+2+y-(16-8x+y)=9x-14$ より，

$1\leq x\leq \dfrac{14}{9}$ のとき $16-8x+y\geq 0$ すなわち $y\geq 8x-16$

$\dfrac{14}{9}\leq x\leq 2$ のとき $x+2+y\geq 0$　すなわち $y\geq -x-2$

以上より，満たすべき条件は，

$1\leq x\leq \dfrac{14}{9}$ のとき $8x-16\leq y\leq x^3-4x$　・・・①

$\dfrac{14}{9}\leq x\leq 2$ のとき $-x-2\leq y\leq x^3-4x$　・・・②

$2\leq x\leq \dfrac{20}{9}$ のとき

$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	1	$\cdots$	2
y'		$-$	
y	$x+2+y$	$\downarrow$	$16-8x+y$

よって，$x+2+y\geq 0$ かつ $16-8x+y\leq 0$　すなわち　$-x-2\leq y\leq 8x-16$　・・・③

以後，解法 1 と同じ

解法 3　数学Ⅲ

$y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ $(1\leqq t\leqq 2)$ における接線の方程式を $y=(3t^2-4)x-2t^3$

とすると，$(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ における接線の傾きすなわち $\dfrac{dy}{dx}$ が $3t^2-4$ と等しいから，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=3t^2-4$ より，$y'(t)=(3t^2-4)x'(t)$　・・・①

$(x(t),\ y(t))$ は $y=(3t^2-4)x-2t^3$ 上の点だから，$y(t)=(3t^2-4)x(t)-2t^3$　・・・②

②の両辺を t で微分すると，$y'(t)=6tx(t)+(3t^2-4)x'(t)-6t^2$　・・・③

①を③に代入すると，$(3t^2-4)x'(t)=6tx(t)+(3t^2-4)x'(t)-6t^2$ より，$6t(x(t)-t)=0$

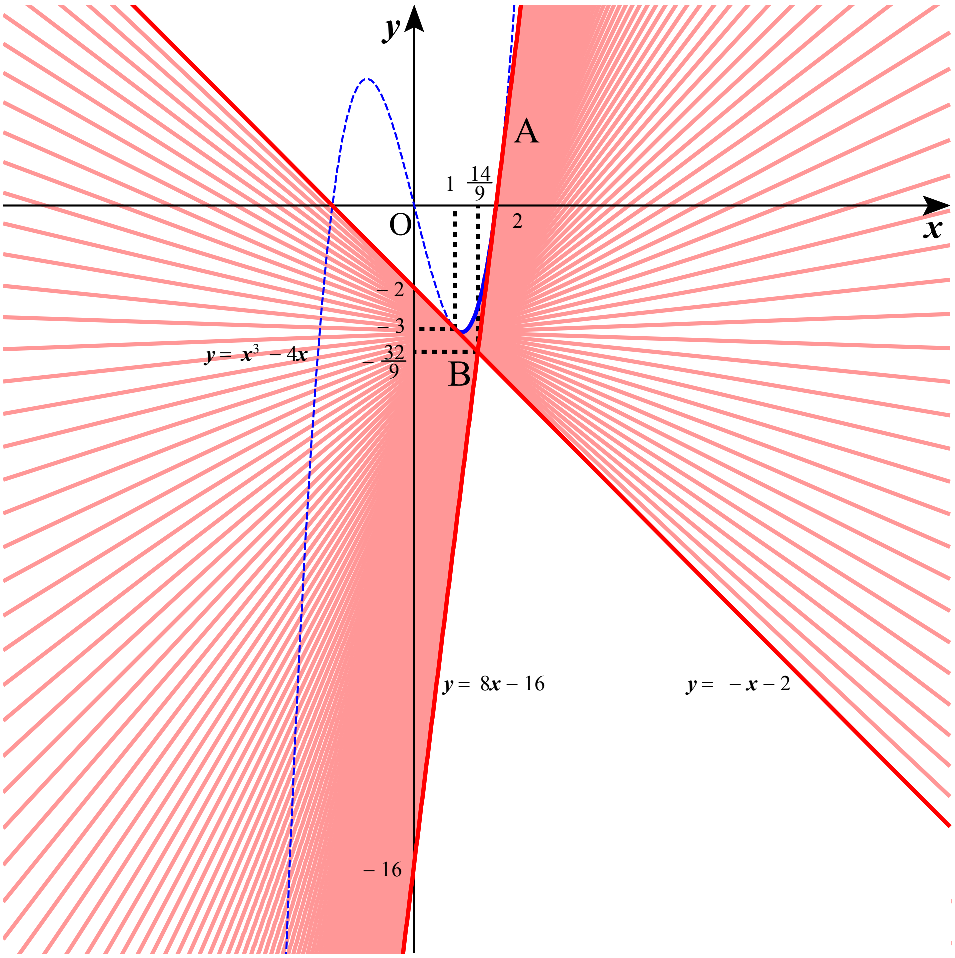
$1\leqq t\leqq 2$ だから，$x(t)=t$　・・・④

④を②に代入し，t を消去すると，$y(t)=f(x(t))=x^3(t)-4x(t)$　$\therefore y=f(x)=x^3-4x$

これと④より，$y=f(x)=x^3-4x$ （$1\leqq x\leqq 2$） 上の点 $(t,\ t^3-4t)$ における接線の方程式は

$y=(3t^2-4)x-2t^3$ である。

よって，$y=(3t^2-4)x-2t^3$ $(1\leqq t\leqq 2)$ が通過する様子を図で示すと次図のようになる。



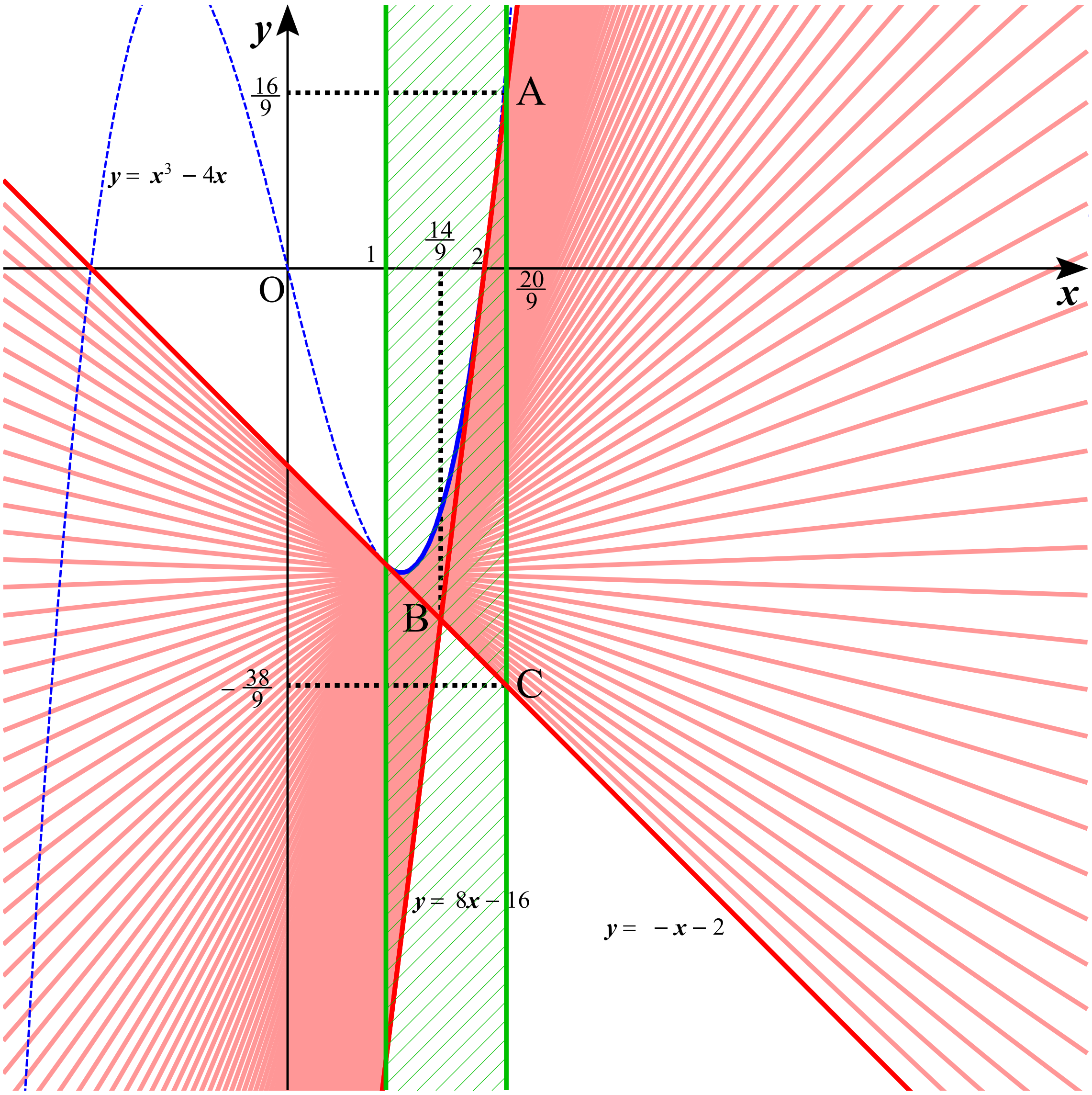
これに $x=1,\ x=\dfrac{20}{9}$ で囲まれた部分を加えると，下図のようになる。

よって，

求める面積＝△ABC の面積＋ $y=x^3-4x$ と $y=8x-16$ と $x=1$ で囲まれた部分の面積

より，

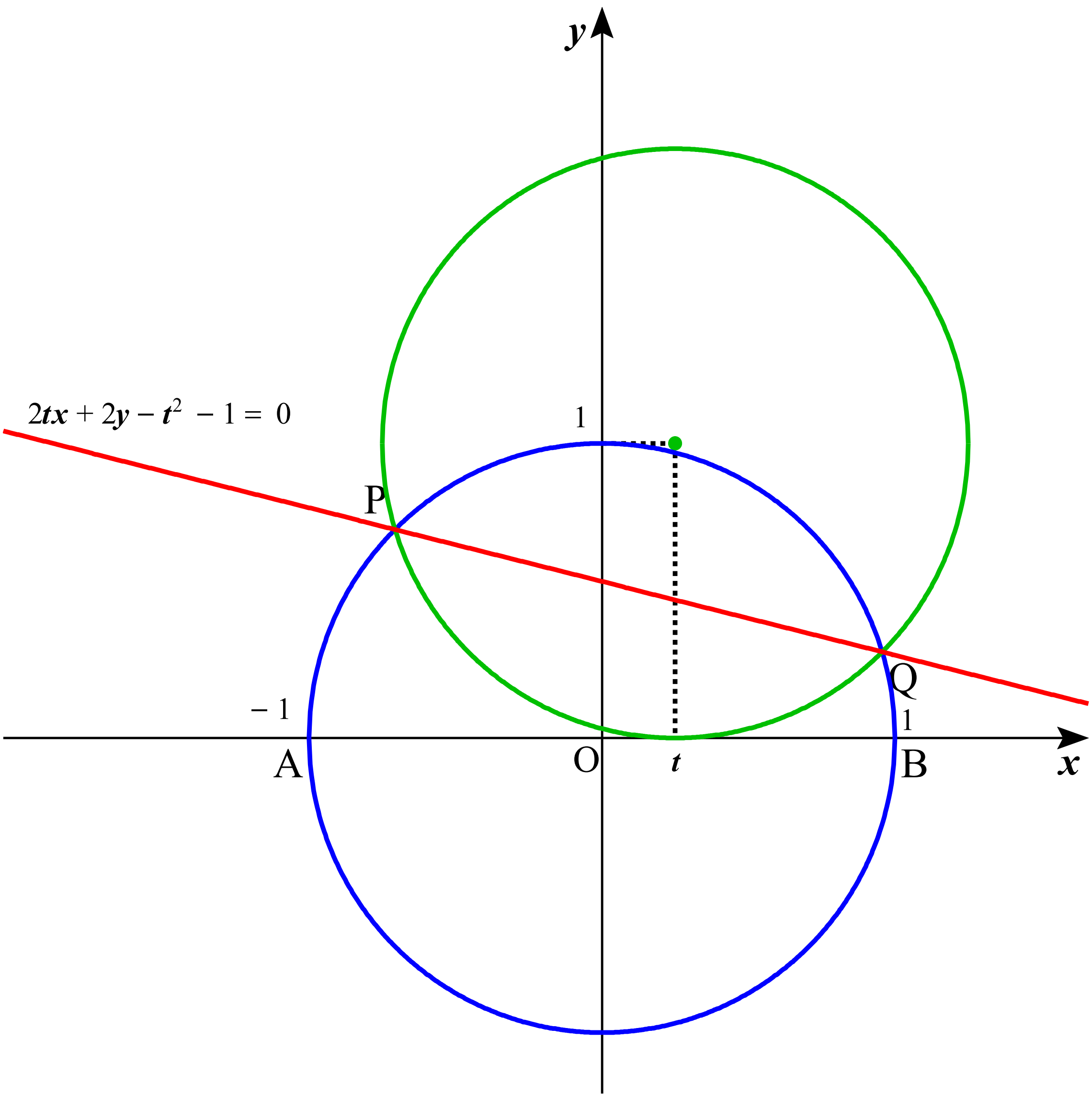
$$\frac{1}{2}\left(\frac{20}{9}-\frac{14}{9}\right)\left\{\frac{16}{9}-\left(-\frac{38}{9}\right)\right\}+\int_1^2\left\{\left(x^3-4x\right)-\left(8x-16\right)\right\}dx=2+\left[\frac{x^4}{4}-6x^2+16x\right]_1^2$$
$$=\frac{15}{4}$$



330

(1)

弧 PQ の長さが問題図の半円と同じで，x 軸と点$(t,\ 0)$で接する円の中心と半径は
それぞれ$(t,\ 1)$，1 である。したがって，その方程式は$(x-t)^2+(y-1)^2=1$ ・・・①
また，中心が O で点 A，B を通る円の方程式は$x^2+y^2=1$ ・・・②
点 P，Q の座標は①と②の連立方程式の解だから，
それら 2 点を通る図形の方程式は実数kを用いて，②$-k\times$①，
すなわち$x^2+y^2-k\{(x-t)^2+(y-1)^2\}=1-k$ と表せる。
これが直線を表すとき，$k=1$ より，$2tx+2y-t^2-1=0$ となる。
よって，点 P，Q を通る直線の方程式は$2tx+2y-t^2-1=0$



(2)

解法 1

$(x,\ y)$を弦 PQ 上の点とすると，$(x,\ y)$が満たすべき条件は，

$2tx+2y-t^2-1=0$ （$-1\leq t\leq 1$）・・・③

$x^2+y^2\leq 1$ （$y\geq 0$）　・・・④

③を t について整理し，t の 2 次方程式とすると，$t^2-2xt-2y+1=0$　・・・⑤

よって，$(x,\ y)$が弦PQ上の点ならば⑤は$-1\leq t\leq 1$を満たす実数解を少なくとも 1 つもつ。

これは $f(t)=t^2-2xt-2y+1=(t-x)^2-x^2-2y+1$ とおくと，

放物線 $f(t)$ が $-1\leq t\leq 1$において t 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつことと同値である。

そこで，このときに$(x,\ y)$が満たす条件を求めと，

④で，$0\leq y^2\leq 1-x^2$ より，$-1\leq x\leq 1$ だから，軸 $t=x$ は$-1\leq t\leq 1$の範囲にある。

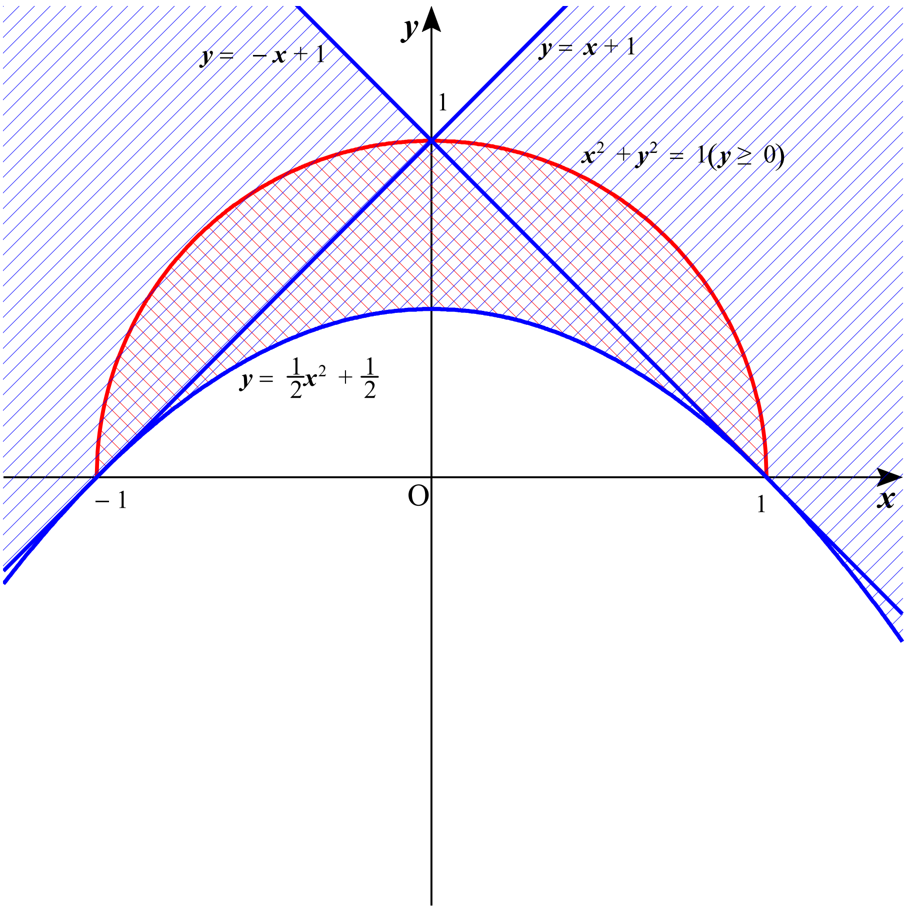
したがって，満たすべき条件は

$f(x)=-x^2-2y+1\leq 0$ かつ（$f(-1)\geq 0$ または $f(1)\geq 0$）

すなわち $y\geq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ かつ（$y\leq x+1$ または $y\leq -x+1$）　・・・⑥

よって，④かつ⑥の領域の面積を求めればよく，

その領域は下図の青色斜線部と赤色斜線部が重なった部分（境界線を含む）である。



ゆえに，求める面積は，

$$\frac{\pi}{2}-\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-2\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-2\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$

解法 2　数学Ⅲ

ある関数 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ （$-1\leq t\leq 1$）における接線の方程式が

$2tx+2y-t^2-1=0$　すなわち $y=-tx+\dfrac{t^2+1}{2}$ であるとすると，

$(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ における接線の傾きすなわち $\dfrac{dy}{dx}$ が $-t$ と等しいから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-t \text{ より，}\quad y'(t)=-tx'(t)\quad \cdots ①$$

$(x(t),\ y(t))$ は $y=-tx+\dfrac{t^2+1}{2}$ 上の点だから，$y(t)=-tx(t)+\dfrac{t^2+1}{2}$　・・・②

②の両辺を t で微分すると，$y'(t)=-x(t)-tx'(t)+t$　・・・③

①を③に代入すると，$-tx'(t)=-x(t)-tx'(t)+t$ より，$t=x(t)$　・・・④

④を②に代入すると，$y(t)=-x^2(t)+\dfrac{x^2(t)+1}{2}$ より，$y(t)=-\dfrac{1}{2}x^2(t)+\dfrac{1}{2}$

これと $y(t)=f(x(t))$ より，

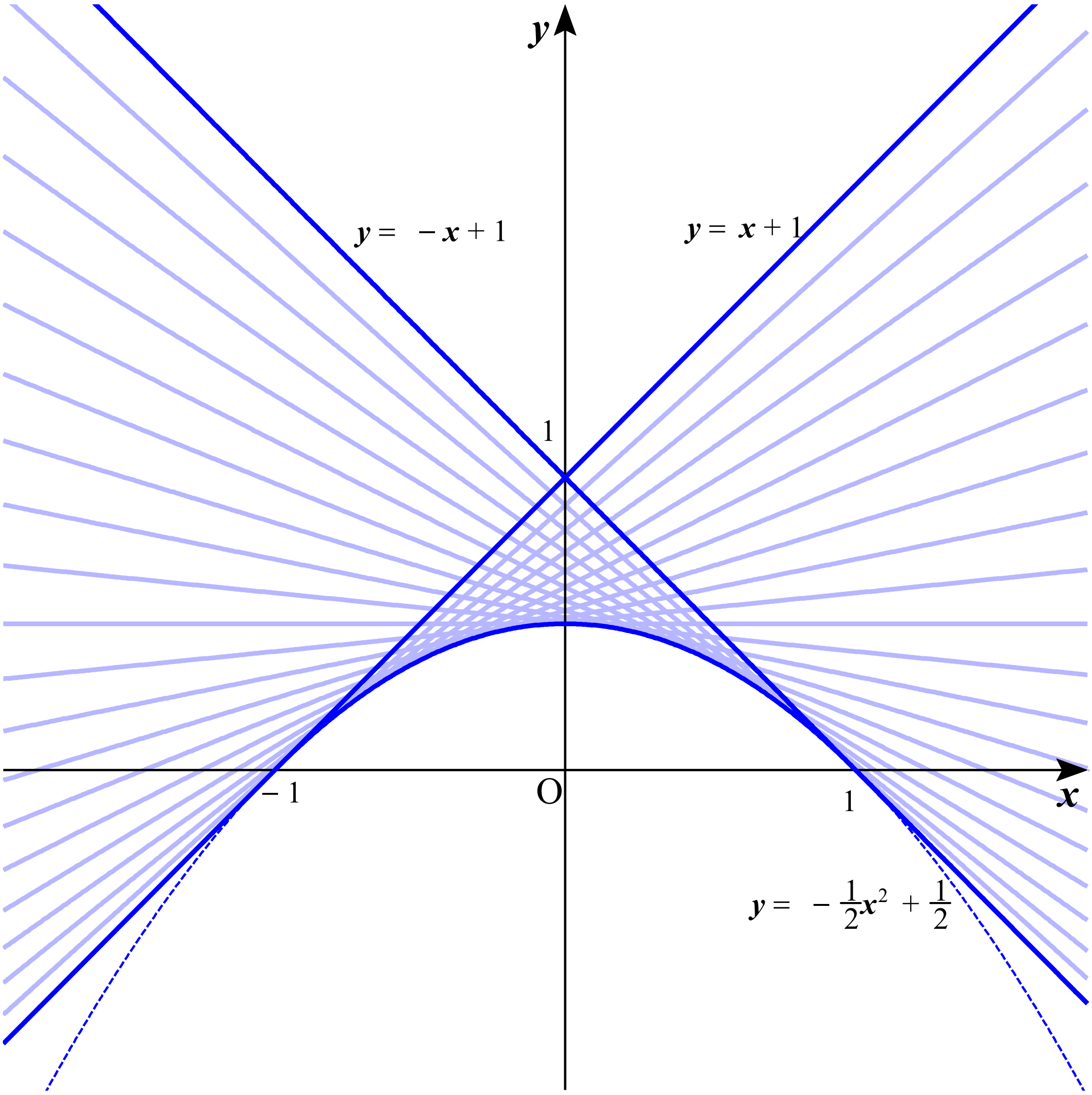
$$f(x(t))=-\frac{1}{2}x^2(t)+\frac{1}{2}$$

ただし，$-1\leq t\leq 1$ および④より，$-1\leq x(t)\leq 1$

よって，$y=-tx+\dfrac{t^2+1}{2}\ (-1\leq t\leq 1)$ は，

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\ (-1\leq x\leq 1)$ 上の点 $(t,\ f(t))\ (-1\leq t\leq 1)$ における接線を表す。

よって，この接線が通る範囲を図示すると，次図のようになる。

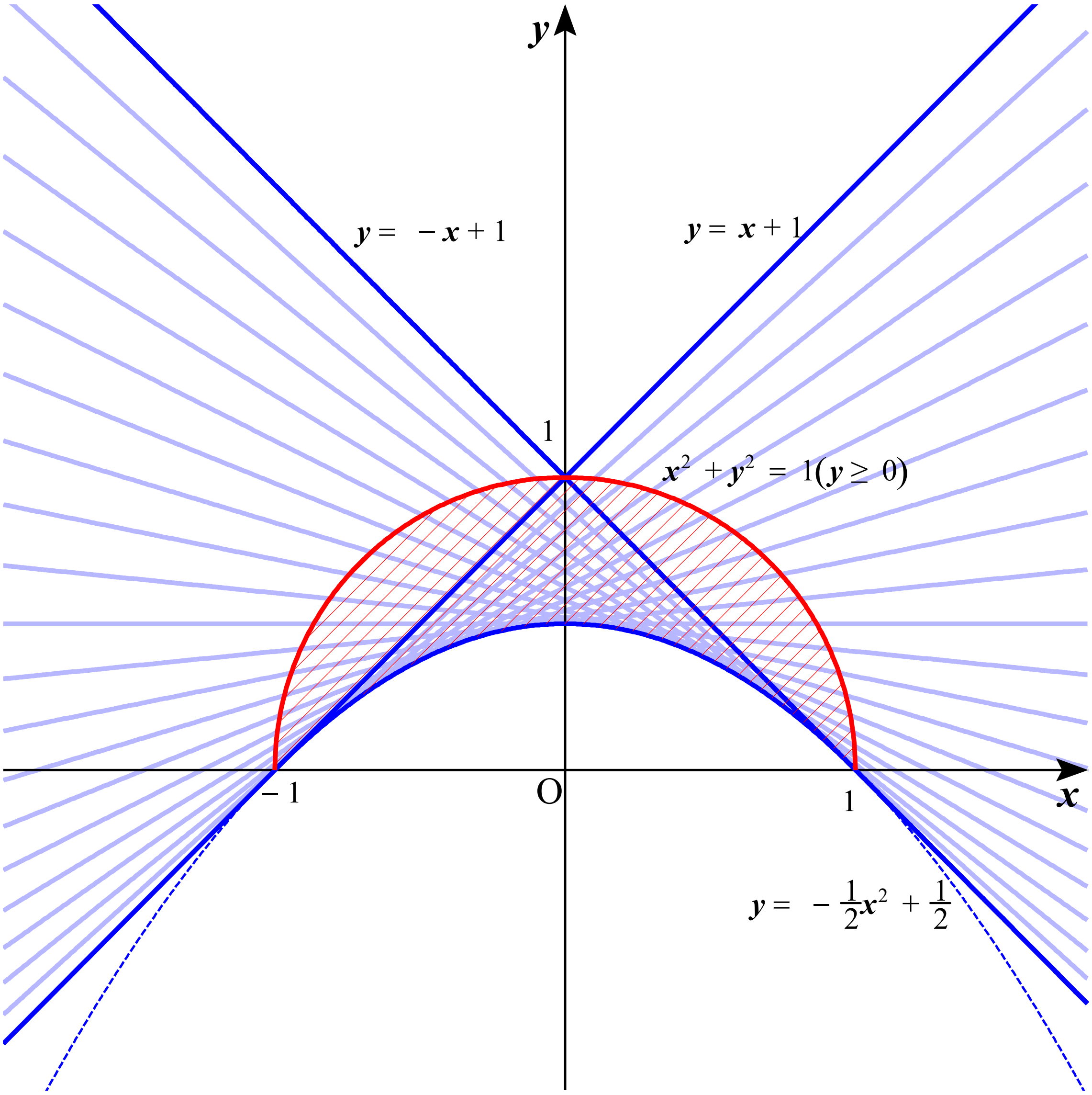


弦 PQ 上の点は $x^2+y^2 \leq 1$ （$y \geq 0$）に存在するから，
求めるべき面積は次図赤色斜線部の領域である。
よって，その面積は

$$\frac{\pi}{2}-\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-2\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$



y
x
O
1
−1
1
y = −x + 1
y = x + 1
x² + y² = 1(y ≥ 0)
y = −½x² + ½